

Michal Šprlák

---

# FYZIKÁLNÍ GEODÉZIE



**FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY  
V PLZNI**

**KATEDRA  
GEOMATIKY**

## **FYZIKÁLNÍ GEODÉZIE**

Michal Šprlák

Recenzent: prof. Ing. Jan Kostecký, DrSc.

Grafický návrh obálky: Tereza Saitzová

Vydala: Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 2732/8, 301 00 Plzeň

Vytiskl: Polypress s.r.o., Truhlářská 486/15, 360 17 Karlovy Vary

První vydání, 189 stran

Pořadové číslo: 2445, ediční číslo: 55-019-26

Plzeň 2026

ISBN 978-80-261-1355-3

ISBN 978-80-261-1356-0 (online ; pdf)

DOI <https://doi.org/10.24132/ZCU.2026.13560>

© Západočeská univerzita v Plzni, 2026

# Předmluva

Gravitace je přírodní fenomén odrážející stav přitahujících se hmot a patří mezi čtyři základní fyzikální interakce. Její znalost je nezbytná například při: 1) definicích planetárních referenčních systémů pro určování polohy a předpovídání oběžných drah umělých družic v geodézii; 2) studiu vnitřního složení, podpovrchových procesů a tepelného vývoje planetárních těles v geofyzice a planetárních vědách; 3) monitorování transportu hmoty při pochopení klimatických změn v environmentálních vědách; 4) navigaci pozemních a vesmírných vozidel v dopravě, průzkumu vesmíru a vojenských operacích. Obecně gravitace napomáhá pokrokům vědy, průmyslu a výzkumu; a při řešení široké škály společenských problémů, jako je udržitelná energie, environmentální aspekty nebo rozvoj infrastruktury.

Disciplína zabývající se určováním makroskopických gravitačních polí se nazývá fyzikální geodézie. Tato je nedílnou součástí Mezinárodní asociace geodézie a oficiálně se považuje za jeden ze tří hlavních pilířů moderního geodetického výzkumu. Významnou pozici fyzikální geodézie také demonstruje nespočet vědců z jiných vědeckých a technických oborů, kteří pro své účely rutinně používají produkty ve formě statických a časově proměnných gravitačních polí. Tyto argumenty přirozeně motivují ke vzdělávání následujících generací studentů a výzkumníků v oblasti měření a modelování gravitačního pole. Je nezbytné jim poskytnout zdroje informací, například ve formě vhodného učebního textu.

Za standardní učebnici fyzikální geodézie, určenou zejména univerzitním studentům, se považuje monografie v anglickém jazyce (Heiskanen a Moritz, 1967), případně její revidované vydání (Hofmann–Wellenhopf a Moritz, 2006). Soubor pokročilých partií fyzikální geodézie, vhodný pro doktorandy a výzkumníky, byl publikován v (Moritz, 1989). Guo (2023) napsal momentálně nejaktuálnější učebnici o teoretických základech fyzikální geodézie v anglickém jazyce. V anglicko–jazyčné literatuře existuje množství geovědných a multidisciplinárních titulů, zejména monografií a příruček, které věnují gravitačnímu poli vybrané kapitoly, viz např. (Torge a Müller, 2012; Sansò a Sideris, 2013; Freedman a kol., 2015; Michel, 2022). V Česko–slovenském prostředí také vzniklo několik unikátních publikací z fyzikální geodézie. Za zmínku stojí klasické učebnice (Pick a kol., 1973; Burša, 1977; Burša a Pěč, 1988) nebo vysokoškolská skripta (Mojzeš, 1989; Janák a kol., 2006;

Zeman, 2008; Janák, 2010; Zeman, 2010).

Při výuce fyzikální geodézie je evidentně z čeho čerpat. Je však třeba si uvědomit, že uvedené zdroje nemusí reflektovat nejmodernější teoretické a technologické pokroky. Některé zdroje dokonce viditelně sledují výklad v klasické monografii (Heiskanen a Moritz, 1967), případně se obsáhle věnují tématům, která jsou v současnosti neaktuální až irelevantní. Tyto důvody a výsledky mé vlastní systematické vědecké práce přispěly ke vzniku nových skript, které právě čtete.

Předkládaný učební text sestává z dvanácti kapitol, které lze rozdělit do tří částí. Úvodní část v kapitole 1 představuje pojem „geodézie“, tak jak je chápán v pojetí Mezinárodní asociace geodézie. Kapitoly 2–4 jsou postupně zaměřeny na souřadnicové systémy; pole, diferenciální operátory a tenzory; a ortogonální systémy funkcí. Jejich účelem je představit základní symboliku, některé fundamentální pojmy a matematické funkce a je třeba je chápat jako druhou přípravnou část. Konkrétní problémy fyzikální geodézie jsou přebírány až ve třetí části v kapitolách 5–12. V těchto se postupně věnujeme řešení Laplaceovy rovnice, vybraným partiím teorie potenciálu, rozvoji gravitačního potenciálu a jeho vyšších derivací do řad harmonických funkcí, skutečnému tíhovému poli a jeho geometrii, normálnímu a poruchovému tíhovému poli, gravimetrii a výškám, a vnějším okrajovým úlohám. Obdobná struktura v pořadí motivace, nomenklatura a řešení problému je vlastní mému způsobu předávání informací, rutinně ji používám i při psaní odborných článků a zdá se být schůdná i pro čtenáře.

Zvolené partie fyzikální geodézie mohou být předmětem i jiných učebních textů uvedených výše. Tato skripta jsou však unikátní, a to nejen v Česko–slovenském prostředí, minimálně ze dvou důvodů. Za prvé je uvažována široká škála veličin gravitačního (tíhového) pole v podobě potenciálu, tří složek gradientu potenciálu a šesti složek tenzoru druhého stupně. Za druhé se uvedený matematický aparát neomezuje jen na symetrickou sférickou geometrii, ale je systematicky rozvíjen i pro mnohem komplikovanější geometrii rotačního elipsoidu.

Samotný obsah a způsob výkladu mohou být předmětem dalekosáhlé diskuse. Tyto aspekty nebyly zvoleny náhodně bez uvážení, naopak jsou výsledkem dlouhodobějšího procesu. První návrh tohoto učebního textu vznikl v roce 2020 pro potřeby výuky předmětu Matematická a fyzikální geodézie (v současnosti Fyzikální geodézie I) na Západočeské univerzitě v Plzni pro studenty navazujícího studia a do předkládané podoby se vykrytalizoval iterativně. O oprávněnosti zvoleného obsahu a způsobu výkladu, mě postupně přesvědčovaly i jiné skutečnosti. V průběhu let 2022–2025, po absolvování předmětů Matematická a fyzikální geodézie nebo Fyzikální geodézie I, bylo několik nejen nadaných studentů zapojených do řešení projektů základního výzkumu v oblasti modelování gravitačního pole. Všichni tito studenti byli schopni řešit komplexní úkoly a aktivně prezentovali výsledky své výzkumné činnosti na vědeckých sympoziích, v odborných publi-

kacích nebo v rámci závěrečných prací. Dovolím si tedy tvrdit, že předkládaný učební text opravdu může mít potenciál podat solidní základy předmětu fyzikální geodézie v přímé návaznosti na aktuální výzkumné problémy a výzvy.

Plzeň, duben 2026

Michal Šprlák

# Poděkování

Rád bych poděkoval všem, kteří se přímo či nepřímo podíleli na této práci. Zejména bych rád vyjádřil poděkování všem svým mentorům, kolegům a studentům za nespočetné odborné diskuze a podněty. Děkuji Mgr. Jakubovi Pokornému z vydavatelství ZČU v Plzni za veškerou nakladatelskou práci spojenou s vydáním těchto skript. Prof. Ing. Jan Kostecký, DrSc. byl ochoten rukopis skript recenzovat. Úpřímně mu děkuji za čas strávený čtením textu a vypracování lektorského posudku. V neposlední řadě jsem vděčný své rodině za jejich neustálou psychickou podporu.

# Obsah

Předmluva	i
Poděkování	iv
Seznam zkratk	v
Seznam obrázků	vii
Seznam tabulek	ix
<b>1 Geodézie – definice, náplň, historie, mezinárodní organizace, instituce a literatura</b>	<b>1</b>
1.1 Definice a náplň geodézie . . . . .	1
1.2 Historie geodézie . . . . .	2
1.2.1 Země jako koule . . . . .	3
1.2.2 Země jako rotační elipsoid . . . . .	4
1.2.3 Země jako geoid a mezinárodní spolupráce . . . . .	5
1.2.4 Geodézie v 3D . . . . .	6
1.2.5 Geodézie v 4D . . . . .	7
1.3 Mezinárodní vědecké organizace . . . . .	7
1.3.1 International Science Council (ISC) . . . . .	7
1.3.2 International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) . . . . .	8
1.3.3 International Association of Geodesy (IAG) . . . . .	8
1.4 Národní geodetické instituce . . . . .	11
1.5 Geodetická literatura . . . . .	11
<b>2 Souřadnicové systémy</b>	<b>13</b>
2.1 Základní souřadnicové systémy . . . . .	14
2.1.1 Kartézský souřadnicový systém v 3D . . . . .	14
2.1.2 Globální sférický souřadnicový systém . . . . .	15
2.1.3 Lokální sférický souřadnicový systém . . . . .	16
2.1.4 Polární souřadnicový systém na kouli . . . . .	17

2.1.5	Globální Gaussův elipsoidický souřadnicový systém . . . . .	18
2.1.6	Lokální Gaussův elipsoidický souřadnicový systém . . . . .	20
2.1.7	Globální Jacobiho elipsoidický souřadnicový systém . . . . .	21
2.1.8	Lokální Jacobiho elipsoidický souřadnicový systém . . . . .	22
2.2	Souřadnicové referenční systémy v geodézii . . . . .	23
2.2.1	International Terrestrial Reference System (ITRS) . . . . .	23
2.2.2	International Celestial Reference System (ICRS) . . . . .	24
2.2.3	World Geodetic System (WGS) . . . . .	25
2.2.4	European Terrestrial Reference System 89 (ETRS89) . . . . .	25
2.2.5	Geodetic reference system (GRS) . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Definice pole, diferenciální operátory a tenzory</b>	<b>27</b>
3.1	Definice pole . . . . .	27
3.2	Diferenciální operátory a tenzory v Kartézském souřadnicovém systému v 3D . . . . .	28
3.2.1	Hamiltonův (del, nabla) operátor . . . . .	28
3.2.2	Gradient . . . . .	28
3.2.3	Divergence . . . . .	29
3.2.4	Rotace . . . . .	29
3.2.5	Laplaceův operátor . . . . .	30
3.2.6	Tenzory . . . . .	31
3.3	Obecnější tvar diferenciálních operátorů a tenzorů druhého stupně . . . . .	32
3.4	Vyjádření elementárních veličin, diferenciálních operátorů a tenzoru druhého stupně ve sférických souřadnicích . . . . .	34
3.5	Vyjádření elementárních veličin, diferenciálních operátorů a tenzoru druhého stupně v Jacobiho elipsoidických souřadnicích . . . . .	37
3.6	Gradient a složky tenzoru druhého stupně v polárním systému na kouli . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Ortogonální systémy v problémech modelování gravitačních polí planetárních těles</b>	<b>44</b>
4.1	Legendreovy polynomy . . . . .	44
4.1.1	Legendreovy polynomy 1. druhu a jejich vlastnosti . . . . .	44
4.1.2	Legendreovy polynomy 2. druhu . . . . .	46
4.2	Přidružené Legendreovy funkce . . . . .	46
4.2.1	Přidružené Legendreovy funkce 1. druhu a jejich vlastnosti . . . . .	46
4.2.2	Normované Legendreovy polynomy a normované přidružené Legendreovy funkce 1. druhu . . . . .	48
4.2.3	Přidružené Legendreovy funkce 2. druhu . . . . .	49

4.3	Plošné sférické harmonické funkce . . . . .	49
4.3.1	Plošné sférické harmonické funkce a jejich vlastnosti . . . . .	49
4.3.2	Normované plošné sférické harmonické funkce . . . . .	50
4.4	Rozšíření pro plochu rotačního elipsoidu . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Řešení Laplaceovy rovnice</b>	<b>54</b>
5.1	Řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích . . . . .	55
5.2	Řešení Laplaceovy rovnice v Jacobiho elipsoidických souřadnicích . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Vybrané kapitoly z teorie potenciálu</b>	<b>62</b>
6.1	Základní pojmy . . . . .	62
6.2	Popis gravitačního pole gravitačním potenciálem . . . . .	65
6.3	Vlastnosti gravitačního potenciálu bodové hmoty . . . . .	67
6.4	Gravitační potenciál obecného tělesa a jeho vlastnosti . . . . .	70
6.5	Gravitační potenciál nekonečně tenké vrstvy a jeho vlastnosti . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Rozvoj gravitačního potenciálu a jeho derivací do řady harmonických funkcí</b>	<b>74</b>
7.1	Rozvoj do řady sférických harmonických funkcí . . . . .	74
7.1.1	Gravitační potenciál obecného tělesa . . . . .	74
7.1.2	Gravitační potenciál obecného tělesa vně nejmenší Brillouinovy sféry	77
7.1.3	Gravitační potenciál nekonečně tenké vrstvy vně nejmenší Brillouinovy sféry . . . . .	80
7.1.4	Určení povrchové hustoty ze znalosti gravitačního potenciálu vně nejmenší Brillouinovy sféry . . . . .	82
7.2	Rozvoj do řady elipsoidických harmonických funkcí . . . . .	84
7.2.1	Gravitační potenciál obecného tělesa . . . . .	84
7.2.2	Gravitační potenciál obecného tělesa vně nejmenšího Brillouinova rotačního elipsoidu . . . . .	87
7.2.3	Gravitační potenciál nekonečně tenké vrstvy vně nejmenšího Brillouinova rotačního elipsoidu . . . . .	90
7.2.4	Určení povrchové hustoty ze znalosti gravitačního potenciálu vně nejmenšího Brillouinova rotačního elipsoidu . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Skutečné tíhové pole a jeho geometrie</b>	<b>94</b>
8.1	Skutečné tíhové pole . . . . .	94
8.2	Ekvipotenciální (hladinové) plochy a tížnice . . . . .	96
8.3	Křivost ekvipotenciálních ploch a tížnic . . . . .	99
8.3.1	Křivost křivky . . . . .	99

8.3.2	Křivost ekvipotenciální plochy . . . . .	99
8.3.3	Křivost tížnice . . . . .	101
8.4	Přirozený souřadnicový systém . . . . .	103
<b>9</b>	<b>Normální a poruchové tíhové pole</b>	<b>105</b>
9.1	Normální tíhové pole . . . . .	105
9.1.1	Normální tíhové pole ekvipotenciálního elipsoidu . . . . .	105
9.1.2	Geodetic reference system 1980 . . . . .	113
9.2	Poruchové tíhové pole . . . . .	114
9.2.1	Veličiny poruchového tíhového pole . . . . .	114
9.2.2	Matematické vztahy mezi poruchovým potenciálem a ostatními veličinami poruchového tíhového pole . . . . .	118
<b>10</b>	<b>Gravimetrie a výšky používané v geodézii</b>	<b>123</b>
10.1	Gravimetrie . . . . .	123
10.1.1	Pozemní gravimetrie . . . . .	124
10.1.2	Družicová gravimetrie . . . . .	136
10.1.3	Gravimetrický referenční systém . . . . .	141
10.2	O výškách používaných v geodézii . . . . .	141
10.2.1	Elipsoidické výšky . . . . .	146
10.2.2	Vertikální referenční systém a rámec . . . . .	146
<b>11</b>	<b>Vnější okrajové úlohy teorie potenciálu a jiné integrální transformace</b>	<b>148</b>
11.1	Vnější okrajové úlohy a odvozené integrální transformace ve sférické aproximaci . . . . .	149
11.1.1	Řešení vnější sférické Dirichletovy okrajové úlohy . . . . .	150
11.1.2	Řešení vnější sférické Neumannovy okrajové úlohy . . . . .	152
11.1.3	Řešení vnější sférické Stokesovy okrajové úlohy . . . . .	154
11.1.4	Odvozené sférické integrální transformace . . . . .	156
11.1.5	Uzavřené tvary izotropních integrálních jader . . . . .	159
11.2	Vnější okrajové úlohy a odvozené integrální transformace v elipsoidické aproximaci . . . . .	160
11.2.1	Řešení vnější elipsoidické Dirichletovy okrajové úlohy . . . . .	162
11.2.2	Řešení vnější elipsoidické Neumannovy okrajové úlohy . . . . .	164
11.2.3	Odvozené integrální transformace . . . . .	166
<b>12</b>	<b>Praktické aspekty numerického výpočtu veličin poruchového tíhového pole pomocí integrálních transformací</b>	<b>171</b>
12.1	Rozklad globální integrace . . . . .	172

12.1.1 Rozklad globální integrace v prostorové oblasti . . . . .	172
12.1.2 Metoda Remove–Compute–Restore . . . . .	177
12.2 Diskretizace integrálu pro výpočet vlivu blízkých zón . . . . .	179
12.3 Modifikace integrálního jádra . . . . .	180
12.4 Inverzní problém . . . . .	183
<b>Literatura</b>	<b>184</b>